Courbes paramétrées

Plan du chapitre

La géométrie a pratiquement disparu des programmes de classes préparatoires scientifiques. Le programme officiel ne prévoit que très peu de choses sur le sujet des « courbes paramétrées ».

I - Quelques généralités

1) *Arcs paramétrés*

Définition 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Un **arc paramétré** de E est une application d'une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E du type $\gamma : \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & \gamma(t) \end{array}$.

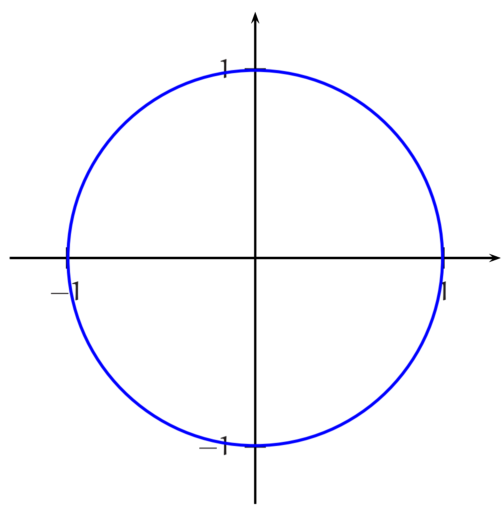
Quand E est un plan, on dit que l'arc est un **arc plan**.
Le **support** Γ de l'arc γ est l'ensemble des points $\gamma(t)$, $t \in D$.

On a une interprétation cinématique de la notion d'arc paramétré. Si t est le temps qui passe, $\gamma(t)$ s'interprète comme un **point en mouvement**. $\gamma(t)$ est la position du point γ à l'instant t. Le support de l'arc $t \mapsto \gamma(t)$ s'appelle plutôt la **trajectoire** du point γ.

La lette γ est utilisée en référence au nom Γ donné au support. On peut aussi utiliser la lettre M qui est plus classique pour désigner un point : $\begin{array}{ccc} D & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & M(t) \end{array}$.

Par exemple, l'application $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$ est un arc paramétré de $\mathbb{R}^2$. Son support est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 (si on a muni $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique). La version complexe de cet arc est l'application $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array}$.

On note que la seule donnée du support ne suffit pas à comprendre l'arc paramétré. Par exemple, le seul dessin



ne permet pas de comprendre que le point $\gamma(t)$ a parcouru ce cercle une infinité de fois à vitesse constante. L'arc $\gamma_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(\cos\left(t^2\right), \sin\left(t^2\right)\right) \end{array}$ est un autre arc ayant le même support. Le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 est parcouru de plus en plus vite quand t croît à partir de 1.

2) *Tangente et normale en un point régulier*

a) Arcs de classe C^1

Définition 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Quand l'application $\gamma : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & \gamma(t) \end{array}$ est de classe C^1 sur D, on dit que **l'arc paramétré γ est de classe** C^1 sur D.

On sait d'après le chapitre précédent que

Théorème 1. Soit $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Si pour tout t de I, on pose

$$\gamma(t)=x_1(t)e_1+\ldots+x_n(t)e_n,$$

où les x_k, $k\in[\![1,n]\!]$, sont des applications de I dans $\mathbb{R}$, alors γ est de classe C^1 sur I si et seulement si pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, x_k est de classe C^1 sur I et dans ce cas, pour tout t de I,

$$\gamma'(t)=x_1'(t)e_1+\ldots+x_n'(t)e_n,$$

b) Vecteur dérivé en un point. Points réguliers

Le **vecteur dérivé** en $t_0\in I$ de l'arc $\begin{array}{ccc} I & \to & E \\ t & \mapsto & M(t)\end{array}$, de classe C^1 sur I, se note $\overrightarrow{\dfrac{dM}{dt}(t_0)}$ ou $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)$ (auquel cas la notation $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ désigne une fonction de I dans E) ou plus simplement $\dfrac{dM}{dt}(t_0)$. Par définition,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}(M(t)-M(t_0))=\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\overrightarrow{M(t_0)M(t)}.$$

Définition 3. Un point $M(t_0)$ d'un arc $\begin{array}{ccc} I & \to & E \\ t & \mapsto & M(t)\end{array}$, de classe C^1 sur I est dit **régulier** (resp. **singulier**) si et seulement si $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)\neq\overrightarrow{0}$ (resp. $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)=\overrightarrow{0}$).

L'arc $\begin{array}{ccc} I & \to & E \\ t & \mapsto & M(t)\end{array}$ est dit **régulier** si et seulement si tous ses points sont réguliers.

Dans le cas où le paramètre t est le temps (interprétation cinématique), le vecteur dérivé en $M(t_0)$ est le **vecteur vitesse instantanée** :

$$\overrightarrow{V}(t_0)=\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0).$$

Dans ce cas, si $\overrightarrow{V}(t_0)=\overrightarrow{0}$, on dit plutôt que le point $M(t_0)$ est un point stationnaire.

c) Tangente en un point régulier

On se place maintenant dans la situation fréquente où l'application $t\mapsto M(t)$ est injective sur un voisinage de t_0. Ceci a pour conséquence le fait que, pour t au voisinage de t_0 et distinct de t_0, on a $M(t)\neq M(t_0)$.

On dit que l'arc $\begin{array}{ccc} I & \to & E \\ t & \mapsto & M(t)\end{array}$ admet une tangente en $M(t_0)$ si et seulement si la droite $(M(t_0)M(t))$ (qui est définie pour t au voisinage de t_0 et distinct de t_0) admet une position limite quand t tend vers t_0. Ceci est assuré si la droite $(M(t_0)M(t))$ admet un vecteur directeur $\overrightarrow{u(t)}$ qui a une limite **non nulle** quand t tend vers t_0 en restent distinct de t_0.

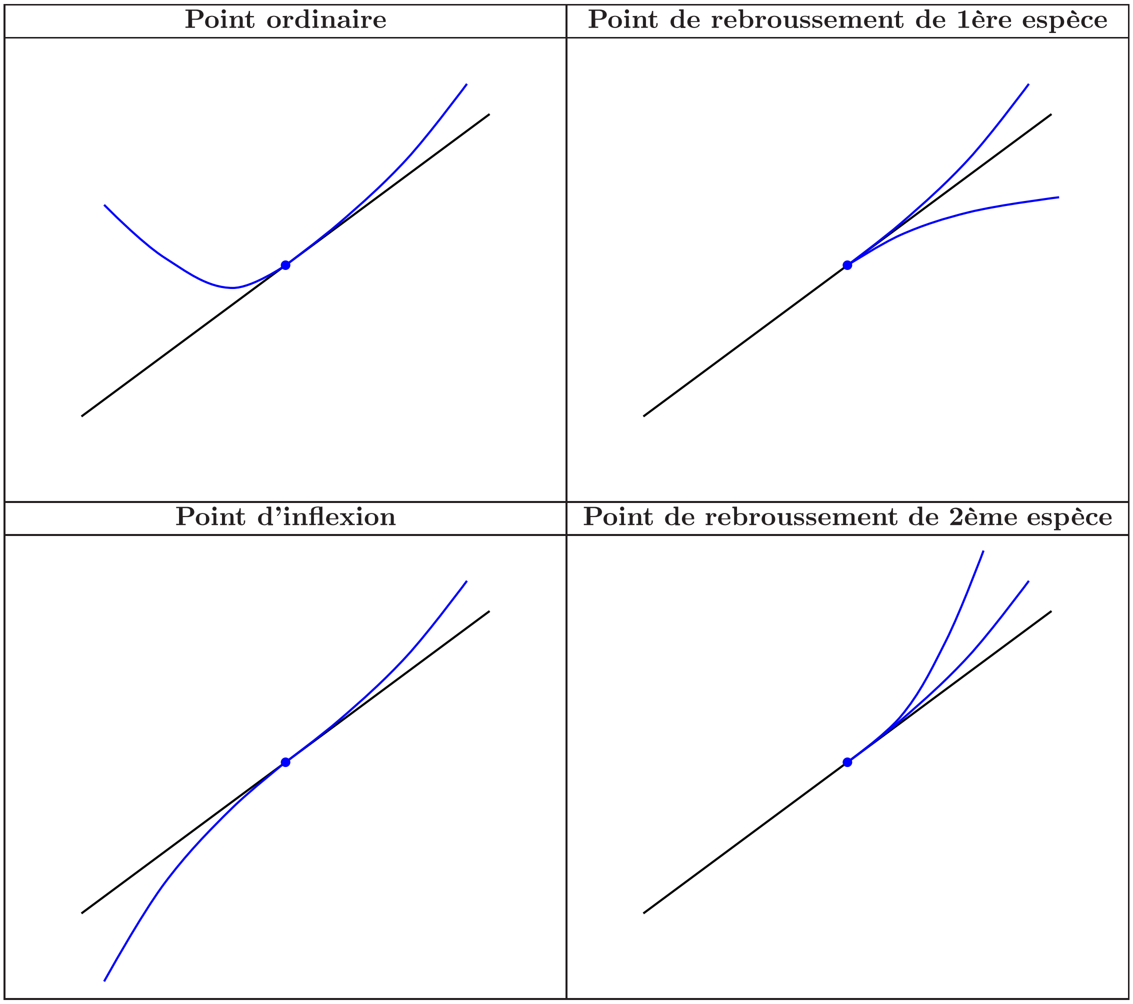
Pour t au voisinage de t_0 et distinct de t_0, le vecteur $\overrightarrow{u}(t)=\dfrac{1}{t-t_0}\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ est un vecteur directeur de la droite $(M(t_0)M(t))$. Si l'arc $t\mapsto M(t)$ est de classe C^1 au voisinage de t_0, le vecteur $\overrightarrow{u}(t)$ tend vers $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)$. Si ce vecteur n'est pas nul, on en déduit que, la fonction $t\mapsto M(t)$ est injective sur un voisinage de t_0, que l'arc admet une tangente en $M(t_0)$ et que cette tangente est dirigée par le vecteur $(M(t_0)M(t))$. Donc,

Théorème 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.Soit $t\mapsto M(t)$ un arc de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E.

Si $M(t_0)$ est un point régulier de l'arc $t\mapsto M(t)$, alors cet arc admet une tangente en $M(t_0)$ et cette tangente est la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)$.

Dans le cas d'un arc plan, les situations que l'on peut rencontrer dans la pratique concernant la position de la courbe par rapport à sa tangente, sont plus variées que les situations que l'on rencontre en construisant des graphes de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ce qui est un cas particulier des arcs paramétrés plans : le graphe d'une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est aussi le support de l'arc paramétré $\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=f(t)\end{array}\right.$).

On peut démontrer (ce que l'on ne fera pas) que l'on obtient quatre situations types :



Quand la tangente n'est pas parallèle à (Oy), on obtient un point ordinaire ou un point d'inflexion quand la fonction $t \mapsto x(t)$ est monotone sur un voisinage de t_0. Les points de rebroussement sont obtenus par exemple quand la fonction $t \mapsto x(t)$ change de sens de variation en t_0.
On peut démontrer qu'en un point régulier, on ne peut obtenir qu'un point ordinaire ou un point d'inflexion ou encore, un point de rebroussement est nécessairement un point d'inflexion.

d) Normale en un point régulier d'un arc plan

> DÉFINITION 4. Soit $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) \end{array}$ un arc plan admettant une tangente (T_{t_0}) en $M(t_0)$, $t_0 \in I$.
>
> La **normale** à l'arc en $M(t_0)$ est la perpendiculaire à la tangente (T_{t_0}) en $M(t_0)$.

L'expression analytique de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ ($\mathbb{R}^2$ étant muni de sa structure euclidienne et de son orientation canonique) est $\left\{\begin{array}{l} x' = -y \\ y' = x \end{array}\right.$ (obtenue à partir de l'écriture complexe $z' = e^{i\pi/2}z$ ou de l'écriture de la matrice de la rotation vectorielle d'angle θ). D'où la définition

> DÉFINITION 5. Soit $\overrightarrow{u} = (a, b)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
>
> Le **vecteur directement orthogonal** à $\overrightarrow{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{n} = (-b, a)$.

Appliqué à la normale, cela donne

> **Théorème 3.** Soit $t \mapsto M(t)$ un arc plan de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in I$.
>
> Si $M(t_0)$ est un point régulier, la normale en $M(t_0)$ est dirigée par le vecteur $r_{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)\right) = (-y'(t_0), x'(t_0))$.

Exercice 1.

1) Etudier l'arc paramétré $\left\{\begin{array}{l} x = 3t^2 \\ y = 2t^3 \end{array}\right.$ et construire son support.

2) Trouver les droites à la fois tangentes et normales à cet arc.

Solution 1.

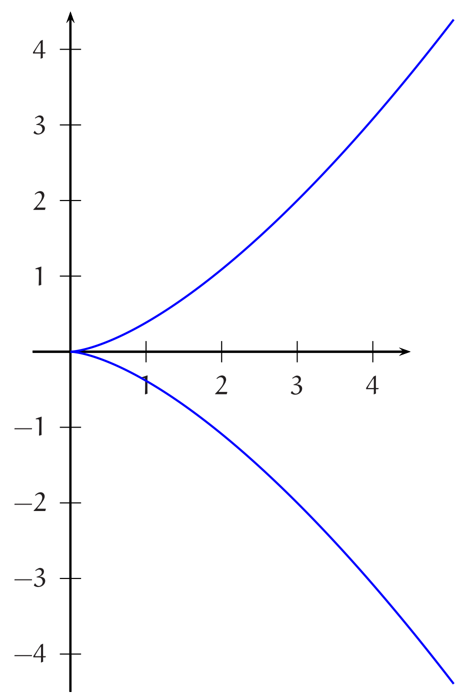
1) • Pour tout réel t, $M(t)$ existe. Pour tout réel t,

$$M(-t) = (x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t)) = s_{(Ox)}(M(t)).$$

On étudie l'arc et on construit son support quand t décrit $[0, +\infty[$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox).

• Pour tout réel t, $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = 6t\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et donc $M(t)$ est régulier pour $t \neq 0$. Pour $t \neq 0$, la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $(1, t)$.

• Le support de l'arc est la réunion des graphes des fonctions $f_1 \ : \ x \mapsto 2\left(\dfrac{x}{3}\right)^{3/2}$ et $f_2 \ : \ x \mapsto -4\left(\dfrac{x}{3}\right)^{3/2}$. D'où le graphique



2) Soit $(u, t) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$. La tangente (T_t) en $M(t)$ a pour équation $-t\left(x - 3t^2\right) + \left(y - 2t^3\right) = 0$ ou encore

$$(T_t) \ : \ tx - y = t^3.$$

La normale (N_u) en $M(u)$ a pour équation $\left(x - 3u^2\right) + u\left(y - 2u^3\right) = 0$ ou encore

$$(N_u) \ : \ x + uy = 3u^2 + 2u^4.$$

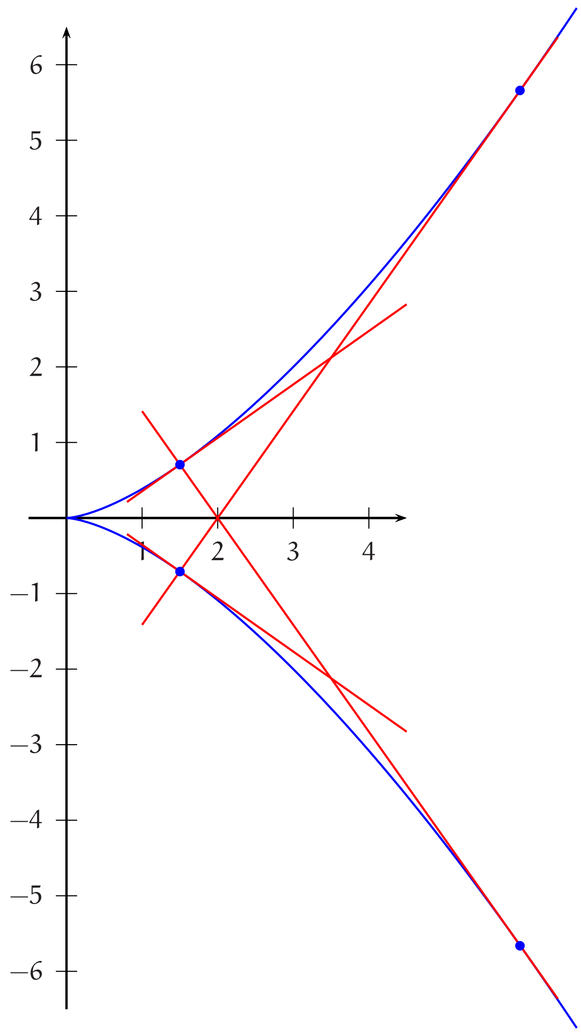
Par suite,

$$(N_u) = (T_t) \Leftrightarrow \frac{1}{t} = -u = \frac{3u^2 + 2u^4}{t^3} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = -\dfrac{1}{t} \\ \dfrac{3}{t^2} + \dfrac{2}{t^4} = \dfrac{t^3}{t} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = -\dfrac{1}{t} \\ t^6 - 3t^2 - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = -\dfrac{1}{t} \\ \left(t^2 - 2\right)\left(t^4 + 2t^2 + 1\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (t, u) = \left(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } (t, u) = \left(-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

La tangente au point $M\left(\sqrt{2}\right)$ est aussi la normale au point $M\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et la tangente au point $M\left(-\sqrt{2}\right)$ est aussi la normale au point $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

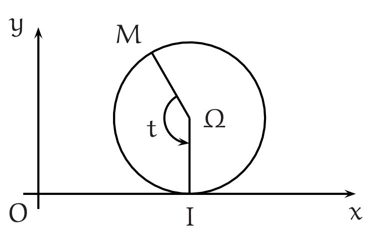


II - Exemples d'étude

On commence par s'intéresser à la trajectoire de la valve d'une roue de vélo :

Exercice 2. (La cycloïde)

1) Un cercle $(\mathscr{C})$, de rayon $R > 0$, roule sans glisser sur l'axe (Ox). On note I le point de contact entre $(\mathscr{C})$ et (Ox) et on note Ω le centre de $(\mathscr{C})$ (Ω et I sont mobiles). M est un point donné de $(\mathscr{C})$ (M est mobile, mais solidaire de $(\mathscr{C})$). On pose $t = \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}}\right)$.



Déterminer une paramétrisation de la courbe décrite par le point M (on prendra t pour paramètre et on choisira un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ comme ci-dessus tel que $M(0) = O$).

2) Etudier l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{array}\right.$ et construire son support, (R est un réel strictement positif donné).

Solution 2.

1) La condition de roulement sans glissement se traduit par $\overline{OI} = \overset{\frown}{MI}$ ou encore $x_\Omega = Rt$. On en déduit que

$$x_M = x_\Omega + R\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - t\right) = Rt - R\sin t = R(t - \sin t)$$

et

$$y_M = y_\Omega + R\sin(2\pi - \frac{\pi}{2} - t) = R - R\cos t = R(1 - \cos t).$$

2) Domaine d'étude.

• Pour tout réel t, $M(t)$ existe.

• Pour tout réel t, $M(t + 2\pi) = M(t) + \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2\pi R \\ 0 \end{pmatrix}$. Par suite, on trace la courbe quand t décrit $[0, 2\pi]$ et la courbe complète est obtenue par translations de vecteurs $k\overrightarrow{u}$, $k \in \mathbb{Z}$.

• Pour tout réel t, $M(-t) = (-x(t), y(t)) = s_{(Oy)}(M(t))$. On trace la courbe quand t décrit $[0, \pi]$, puis on complète par réflexion d'axe (Oy) puis par translations.

Etude des points singuliers. Pour $t \in [0, \pi]$, $x'(t) = R(1 - \cos t)$ et $y'(t) = R\sin t$. Le point $M(t)$ est régulier si et seulement si $t \in]0, \pi]$. Dans ce cas, la tangente en $M(t)$ est dirigée par $\begin{pmatrix} 2R\sin^2(t/2) \\ 2R\sin(t/2)\cos(t/2) \end{pmatrix}$ ou encore par $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Etudions également le point singulier $M(0)$. Pour $t \in]0, \pi]$, le coefficient directeur de la droite $(M(0), M(t))$ est

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{R(1 - \cos t)}{R(t - \sin t)} = \frac{1 - \cos t}{t - \sin t}$$

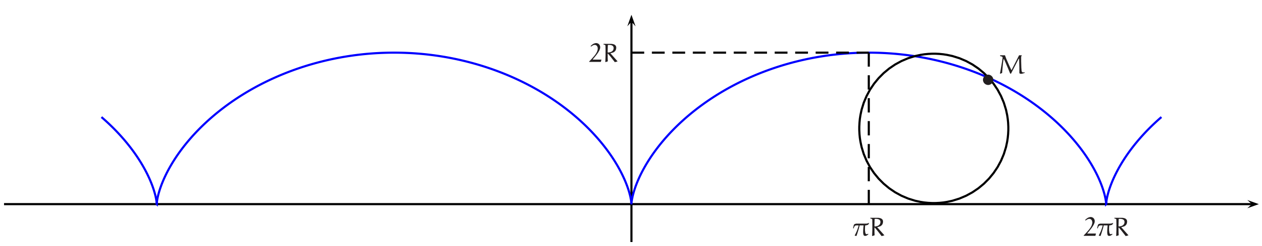
et donc

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^3/6} = \frac{3}{t}.$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{t \to 0,\ t > 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = +\infty$ et donc, la tangente en $M(0)$ est dirigée par $(0, 1)$. Ainsi, dans tous les cas, la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Par symétrie, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

Sinon, x et y sont des fonctions croissantes sur $[0, \pi]$.

Tracé.



La courbe obtenue est une cycloïde. Cette courbe a de très nombreuses propriétés géométriques intéressantes et est solution de nombreux problèmes concrets. Par exemple, on cherche la forme à donner à une piste de ski permettant d'aller d'un point A à un point B (situé plus bas) le plus rapidement possible quand le skieur n'est soumis qu'à la pesanteur (courbe brachistochrone). Jean Bernoulli a démontré que la solution de ce problème est un morceau de cycloïde.

Exercice 3. (L'astroïde.)

1) a est un réel strictement positif donné. Etudier et construire la courbe de paramétrisation : $\left\{ \begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array} \right.$.

2) Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection de la tangente au point courant $M(t)$ avec respectivement (Ox) et (Oy). Calculer la longueur $A(t)B(t)$.

Solution 3.

1) Pour tout réel t, on pose $M(t) = \left(a\cos^3(t), a\sin^3(t)\right)$.

Domaine d'étude.

• Pour tout réel t, $M(t)$ existe.

• Pour tout réel t, $M(t+2\pi) = M(t)$. Par suite, la courbe complète est obtenue quand t décrit un segment de longueur 2π comme par exemple $[-\pi, \pi]$.

• Pour tout réel t,

$$M(-t) = \begin{pmatrix} \cos^3(-t) \\ \sin^3(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ -\sin^3 t \end{pmatrix} = s_{(Ox)}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \pi]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox).

• Pour tout réel t,

$$M(t+\pi) = \begin{pmatrix} \cos^3(t+\pi) \\ \sin^3(t+\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3 t \\ -\sin^3 t \end{pmatrix} = s_O(M(t)).$$

La portion de courbe obtenue quand t décrit $[-\pi, 0]$ est donc la symétrique par rapport à O de la portion de courbe obtenue quand t décrit $[0, \pi]$. Néanmoins, cette constatation ne permet pas de réduire davantage le domaine d'étude.

• Pour tout réel t,

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} \cos^3(\pi - t) \\ \sin^3(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} = s_{(Oy)}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy), puis par réflexion d'axe (Ox).

• Pour tout réel t,

$$M\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \begin{pmatrix} \cos^3\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) \\ \sin^3\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^3 t \\ \cos^3 t \end{pmatrix} = s_{y=x}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe la droite $y = x$, puis d'axe (Oy) et enfin d'axe (Ox).

Variations conjointes de x et y. La fonction $t \mapsto x(t)$ est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et la fonction $t \mapsto y(t)$ est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Etude des points singuliers. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -3a\cos^2 t \sin t \\ 3a\sin^2 t \cos t \end{pmatrix} = 3a\cos t \sin t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Pour tout réel t, le vecteur $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ est unitaire et n'est donc pas nul. Par suite,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 3a\cos t \sin t = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \text{ ou } \sin t = 0 \Leftrightarrow t \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

Les points singuliers sont donc les $M\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour $t \notin \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $M(t)$ est un point régulier et la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Etudions alors le point singulier $M(0)$. Pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$, le coefficient directeur de la droite $(M(0)M(t))$ est

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{a\sin^3 t}{a\cos^3 t - a} = \frac{\sin^3 t}{(\cos t - 1)(\cos^2 t + \cos t + 1)},$$

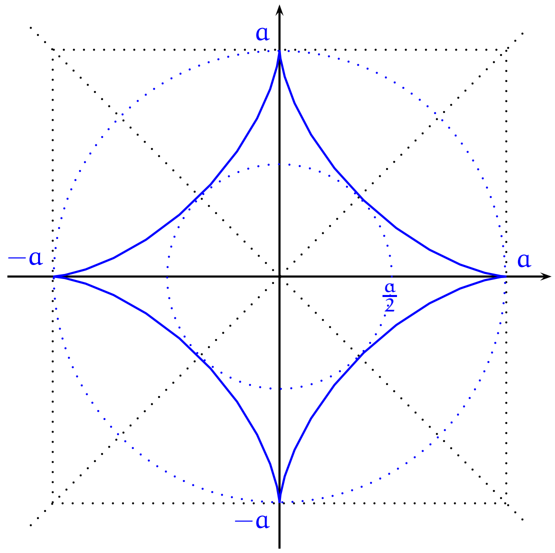
puis

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3}{-\frac{t^2}{2}\times 3} = -\frac{2t}{3}$$

et donc, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = 0$. La courbe admet en $M(0)$ une tangente dirigée par le vecteur $(1,0)$. Par symétrie, la courbe admet également une tangente en $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $M(\pi)$, dirigée respectivement par $(0,1)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. Toujours par symétrie, ces quatre points sont des points de rebroussement de première espèce. Il en résulte aussi que

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \text{la tangente en } M(t) \text{ est dirigée par le vecteur } (-\cos t, \sin t).$$

On en déduit la courbe.



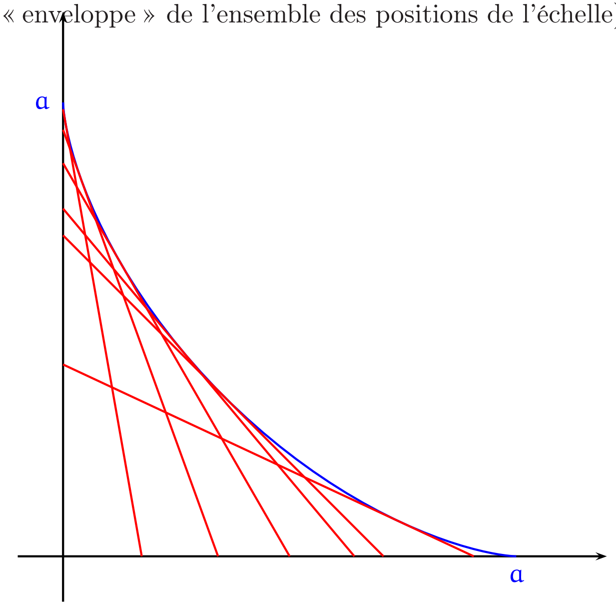
2) Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La tangente $(T(t))$ en $M(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(t) = (-\cos t, \sin t)$ ou encore la normale en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}(t) = (\sin t, \cos t)$. Une équation de $(T(t))$ est :

$$\sin t\left(x - a\cos^3 t\right) + \cos t\left(y - a\sin^3 t\right) = 0.$$

Cette équation peut encore s'écrire $x\cos t + y\sin t = a\sin t\cos t$. Puisque $\cos t \neq 0$ et $\sin t \neq 0$, les points $A(t)$ et $B(t)$ ont donc pour coordonnées respectives $(a\sin t, 0)$ et $(0, a\cos t)$. On en déduit que

$$A(t)B(t) = a\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = a.$$

Ce résultat peut s'interpréter ainsi. Une échelle de longueur a est posée verticalement contre un mur puis à la suite d'une impulsion à sa base, elle se met à glisser sur le sol en restant collée au mur. La courbe implicitement dessinée est un astroïde (on dit que l'astroïde est l'« enveloppe » de l'ensemble des positions de l'échelle).



Exercice 4. (Courbes de LISSAJOUS)

Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{array}\right.$

Solution 4.

Domaine d'étude.

• Pour tout réel t, $M(t)$ existe.

• Pour tout réel t, $M(t+2\pi) = M(t)$ et la courbe complète est obtenue quand t décrit $[-\pi, \pi]$.

• Pour tout réel t,

$$M(-t) = \begin{pmatrix} \sin(-2t) \\ \sin(-3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ -\sin(3t) \end{pmatrix} = s_O(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \pi]$, puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O.

• Pour tout réel t,

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi - 2t) \\ \sin(3\pi - 3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} = s_{(Oy)}(M(t)).$$

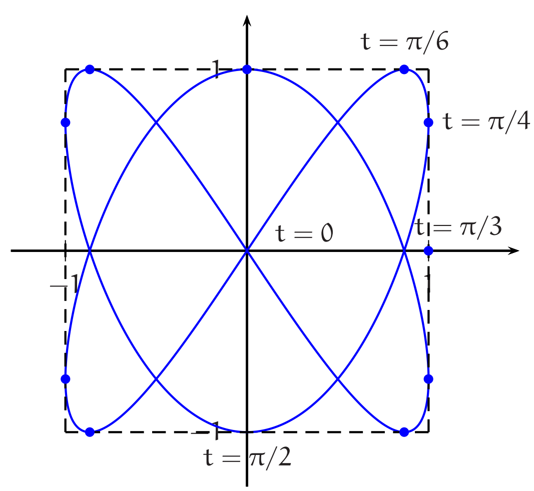
On étudie et on construit la courbe pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis symétrie centrale de centre O.

• On note aussi que $M(t+\pi) = s_{(Ox)}(M(t))$, mais cette constatation ne permet pas de réduire davantage le domaine d'étude.

Variations conjointes de x et y. Pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x'(t) = 2\cos(2t)$ et $y'(t) = 3\sin(3t)$. On en déduit immédiatement le tableau suivant :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$			$+$		0	$-$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0			$-$	

On en déduit la courbe : quand x et y croissent, le tracé se fait en montant vers la droite, quand x croît et y décroît, le tracé se fait en descendant vers la droite, quand x décroît et y croît, le tracé se fait en montant vers la gauche, quand x décroît et y décroît, le tracé se fait en descendant vers la gauche.



Les courbes de Lissajous sont les courbes de paramétrisation $\left\{\begin{array}{l} x = a\sin(pt) \\ y = b\sin(qt+\varphi)\end{array}\right.$. Si on les visualise sur l'écran d'un oscilloscope, elles permettent suivant le cas de visualiser le déphasage ou le rapport de fréquence entre deux signaux sinusoïdaux, l'un rentré en abscisse et l'autre en ordonnée.

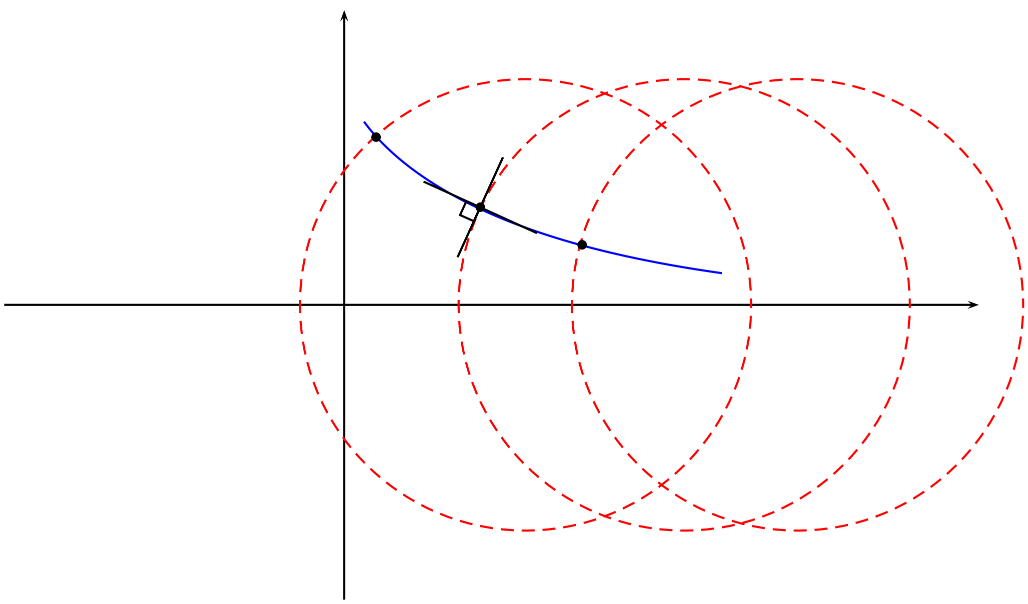
Exercice 5. (les tractrices)

1) Trouver les trajectoires orthogonales à la famille des cercles de rayon R ($R > 0$ donné) et centrés sur (Ox).

2) Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = R\left(\ln\left|\tan\dfrac{t}{2}\right| + \cos t\right) \\ y = R\sin t\end{array}\right.$ où R est un réel strictement positif donné.

Solution 5.

1) Cherchons les arcs solutions sous la forme $\left\{\begin{array}{l} x = f(t) + R\cos t \\ y = R\sin t\end{array}\right.$ où f est une fonction dérivable sur un certain intervalle I (de sorte que le point $M(t)$ est sur le cercle $\mathscr{C}(t)$ de centre $\begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon R). La trajectoire cherchée est orthogonale à chaque cercle $\mathscr{C}(t)$ si et seulement si la tangente à cette trajectoire en $M(t)$ est orthogonale à la tangente au cercle $\mathscr{C}(t)$ en $M(t)$ ou encore « si et seulement si » les vecteurs $(f'(t) - R\sin t, R\cos t)$ et $(-\sin t, \cos t)$ sont orthogonaux. Cette dernière condition s'écrit $-f'(t)\sin t + R(\sin^2 t + \cos^2 t) = 0$ ou encore $f'(t) = \dfrac{R}{\sin t}$ ou enfin, $f(t) = R\ln\left|\tan\dfrac{t}{2}\right| + C$. Les arcs solutions sont les arcs de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} R\left(\ln\left|\tan\dfrac{t}{2}\right| + \cos t\right) + C \\ R\sin t \end{pmatrix}$, où $C \in \mathbb{R}$.



Les courbes solutions se déduisent de la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} R\left(\ln\left|\tan\dfrac{t}{2}\right| + \cos t\right) \\ R\sin t \end{pmatrix}$ par translations de vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{i}$. On peut montrer que la courbe obtenue est la trajectoire de la roue arrière d'une voiture quand celle-ci se gare en marche avant, la roue avant étant quant à elle collée au trottoir.

2) Domaine d'étude.

• La fonction $t \mapsto M(t)$ est 2π-périodique et on l'étudie donc sur $[-\pi, \pi]$. Pour $t \in [-\pi, \pi]$, $M(t)$ existe si et seulement si $t \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$.

• Pour $t \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$, $M(-t) = s_{(Ox)}(M(t))$ puis pour $t \in]0, \pi[$,

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} R\left(\ln\left|\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}\right)\right| + \cos(\pi - t)\right) \\ R\sin(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\left(-\ln\left|\tan(\dfrac{t}{2})\right| - \cos t\right) \\ R\sin(t) \end{pmatrix} = s_{Oy}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe quand t décrit $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis par réflexion d'axe (Ox).

Dérivée. Etude des points singuliers. Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} R\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right) \\ R\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ R\cos t \end{pmatrix} = R\,\mathrm{cotan}\,t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Par suite, $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \mathrm{cotan}\,t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$. Le point $M(\frac{\pi}{2})$ est un point singulier.

Quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$, $y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = R(\sin t - 1) = -R\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) \sim -\frac{R}{2}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2$. D'autre part, en posant $h = \frac{\pi}{2} - t$ ou encore $t = \frac{\pi}{2} - h$, quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$,

$$x'(t) = R\frac{\cos^2 t}{\sin t} = R\frac{\sin^2 h}{\cos h} \sim Rh^2 = R\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2\right),$$

et donc, par intégration,

$$x(t) - x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{R}{3}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3\right) \sim \frac{R}{3}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3.$$

Finalement

$$\frac{y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x(t) - x\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sim \frac{-\frac{R}{2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\frac{R}{3}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3} = -\frac{3}{2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)},$$

et donc $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2},\ t < \frac{\pi}{2}} \frac{y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x(t) - x\left(\frac{\pi}{2}\right)} = +\infty$. Par symétrie d'axe (Oy), la tangente en $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est dirigée par $\overrightarrow{j}$ et $M(\frac{\pi}{2})$ est un point de rebroussement de première espèce.

Sinon, x' et y' sont strictement positives sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que x et y sont strictement croissantes sur cet intervalle. Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $x(t)$ tend vers $-\infty$ et $y(t)$ tend vers 0. On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe. D'autre part, x croit de $-\infty$ à 0 pendant que y croit de 0 à 1.

Courbe.